30/5/2018

Φυλ. 7 ασκ. 1 Δείξτε ότι το $R = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \; m,n \in \mathbb{Z}, n \text{ περιττός}\}$ είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$. Δείξτε επίσης ότι είναι ακέραια περιοχή και δεν είναι σώμα.

ΛΥΣΗ

ΒΗΜΑ 1 $R \neq \emptyset$, γιατί $0 = \frac{0}{1} \in R$

ΒΗΜΑ 2 $(R,+)$ υποομάδα της $(\mathbb{Q},+)$

Απόδειξη Έστω $m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$ με n, n' περιττά.

Τότε $\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'} = \frac{mn' - m'n}{n \cdot n'} \in R$, γιατί

n, n' περιττά $\Rightarrow$ $n \cdot n'$ περιττός

ΒΗΜΑ 3 Αν $m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$ με n, n' περιττά

Τότε $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{m \cdot m'}{n \cdot n'} \in R$ γιατί $n \cdot n'$ περιττός

Άρα R υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$

Επίσης, $1_{\mathbb{Q}} = \frac{1}{1} \in R \Rightarrow R$ δακτύλιος με μονάδα

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ R ακερ. περιοχή

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τα παραπάνω R δακτύλιος με μονάδα. Πρέπει να δείξουμε επιπλέον ότι R μεταθετικός, έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία και $a, b \in R \setminus \{0\} \Rightarrow a \cdot b \neq 0$. Τώρα $\mathbb{Q}$ μεταθετικός δακτύλιος $\Rightarrow$ κάθε υποδακτύλιος μεταθετικός $\Rightarrow R$ μεταθ.

Επίσης, $0, 1 \in R \Rightarrow$ ο R έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία

Επιπλέον, αν a, b μη μηδενικοί ρητοί, τότε $ab \neq 0$. Άρα R ακέραια περιοχή.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ R όχι σώμα

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Μια ακέραια περιοχή είναι σώμα αν και μόνο αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει αντίστροφο.

Υποθ. R σώμα και θα βρούμε αντίφαση

Αφού R σώμα και $2 = \frac{2}{1} \in R$, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$

με n περιττό ώστε $\frac{2m}{n} = 1 \Rightarrow 2m = n \Rightarrow$

n άρτιος αντίφαση.

<u>Ασ.7 ασκ. 1,3</u> Δείξτε ότι το $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{R}$. Επίσης, δείξτε ότι είναι ακέραια περιοχή που δεν είναι σώμα.

<u>ΛΥΣΗ</u> $R \neq \emptyset$ γιατί $0 \in R$ $|R| \geq 2$ γιατί $0, 1 \in R$

<u>ΙΣΧΥΡ. 1</u> $(R, +)$ υποομάδα του $(\mathbb{R}, +)$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Έστω $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$. Τότε $(a + b\sqrt{2}) - (a' + b'\sqrt{2}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{2} \in R$, γιατί $a - a' \in \mathbb{Z}$, $b - b' \in \mathbb{Z}$

<u>ΙΣΧΥΡ. 2</u> Αν $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ τότε $(a + \sqrt{2}b) \cdot (a' + \sqrt{2}b') \in R$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> $(a + \sqrt{2}b)(a' + \sqrt{2}b') = (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2} \in R$, γιατί $aa' + 2bb' \in \mathbb{Z}$, $ab' + a'b \in \mathbb{Z}$

Φανερά $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in R$. Όπως προηγουμένως R ακέραια περιοχή.

<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u> Δεν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ με $2(a + b\sqrt{2}) = 1$ δηλ. το $2 \in R$ <u>δεν</u> έχει αντίστροφο στο R. Συνεπώς, R όχι σώμα.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $2(a + b\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow$ $2a - 1 = b\sqrt{2}$. Αν $b \neq 0$ η $(*) \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2a - 1}{2b} \in \mathbb{Q}$

αντίφαση. Άρα $b = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 2a = 1$ αντίφαση αφού $a \in \mathbb{Z}$.

<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u>. $\tilde{R} = \{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ όχι υποδακτύλιος του $\mathbb{R}$

ενώ $(\tilde{R}, +)$ υποομάδα του $(\mathbb{R}, +)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ίδια επιχειρήματα με πριν δίνουν $(\tilde{R},+)$ υποομάδα του $(R,+)$

Έστω $a,a',b,b'\in\mathbb{Z}$ $(a+b\cdot\sqrt[3]{2})(a'+b'\sqrt[3]{2}) =$
$(aa' + (a'b+b'a)\sqrt[3]{2} + bb'\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2})$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Για $a=a'=0$, $b=b'=1$

$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\notin R$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\in R$. Άρα υπάρχουν $c,d\in\mathbb{Z}$ με $\sqrt[3]{4}=c+d\sqrt[3]{2} \Longrightarrow \ldots$ αντίφαση

Υπενθύμιση G_1, G_2 ομάδες $\phi: G_1\to G_2$ ο/μ. ομάδων. Έχουμε από πρόταση ότι για κάθε υποομάδα H της G_1 $\phi(H)$ υποομάδα της G_2 και αν H' υποομάδα της G_2 τότε $\phi^{-1}(H_2)$ υποομάδα της G_1.

ΠΡΟΣΟΧΗ!! ΠΡΟΤΑΣΗ (Φυλ 8 Ασκ. 4)

Έστω $\phi: R_1\to R_2$ ομομ. δακτυλίων

α) Αν J ιδεώδες του R_2, τότε $\phi^{-1}(J)$ ιδεώδες του R_1

b) Γενικά δεν ισχύει. Αν I ιδεώδες του R_1 τότε $\phi(I)$ ιδεώδες του R_2.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ α) Έστω J ιδεώδες του R_2. Θ.δ.ο. $\phi^{-1}(J)$ ιδεώδες του R_1.

ΙΣΧΥΡ. 1 $(\phi^{-1}(J),+)$ υποομάδα της $(R_1,+)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού ϕ ομομορ. δακτυλίων $\Longrightarrow$ $\phi:(R_1,+)\to(R_2,+)$ ομομορ. ομάδων. Άρα, αφού $(J,+)$ υποομάδα της $(R_2,+)$ από την υπενθύμιση $(\phi^{-1}(J),+)$ υποομάδα της $(R_1,+)$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2 Έστω $r \in R_1$, $a \in \phi^{-1}(J)$, τότε $ra \in \phi^{-1}(J)$ ΚΑΙ $ar \in \phi^{-1}(J)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού $a \in \phi^{-1}(J) \Rightarrow \phi(a) \in J \underset{J \text{ ιδεώδες}}{\Rightarrow} \phi(r)\cdot\phi(a) \in J$

και $\phi(a)\cdot\phi(r) \in J$

$\underset{\phi \text{ ομομ. δακτυλ.}}{\Rightarrow} \phi(ar) \in J$ και $\phi(ra) \in J$

$\Rightarrow ar \in \phi^{-1}(J)$ και $ra \in \phi^{-1}(J)$

Άρα από Ισχυρ. 1 + Ισχυρ. 2 $\Rightarrow \phi^{-1}(J)$ ιδεώδες του R_1

b) Έστω $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ η απεικόνιση $\phi(n) = n$ για $n \in \mathbb{Z}$ (δηλ. η ένθεση του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Q}$)

ΙΣΧΥΡ 1 ϕ ΟΜΟΜΟΡΦ. ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ

ΑΠΟΔ. $\phi(n+n') = n+n' = \phi(n) + \phi(n')$

$\phi(nn') = nn' = \phi(n)\cdot\phi(n')$

ΙΣΧΥΡ 2 Έστω $I = 2\mathbb{Z}$ = άρτιοι ακέραιοι

Τότε I ιδεώδες του $\mathbb{Z}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Το έχουμε δει

ΙΣΧΥΡ. 3 Το $\phi(I)$ όχι ιδεώδες του δακτυλ. $\mathbb{Q}$.

Αποδ. $\phi(I) = 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Τότε $a = 2 \in \phi(I)$, $r = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, αλλά $ra = \frac{2}{3} \notin I$

Φυλ. 8 ασκ. 4

ΛΥΣΗ a) Έστω J πρώτο ιδεώδες του S. Τότε $J \neq S$

Άρα $1_S \notin J$ (γιατί $1_S \in J$ + J ιδεώδες του $S \Rightarrow J = S$)

Άρα αφού $\phi(1_R) = 1_S$ από υπόθεση και $1_S \notin J \Rightarrow$ $1_R \notin \phi^{-1}(J) \Rightarrow \phi^{-1}(J) \neq R$

Από προηγούμενη πρόταση $\phi^{-1}(J)$ ιδεώδες του R

ΙΣΧΥΡ. Έστω $a, b \in R$ με $a \notin \phi^{-1}(J)$ και $b \notin \phi^{-1}(J)$. Τότε $ab \notin \phi^{-1}(J)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $ab \in \phi^{-1}(J)$. Τότε $\phi(ab) \in J \Rightarrow \phi(a)\phi(b) \in J$

$\underset{J \text{ πρώτο}}{\Rightarrow} \phi(a) \in J$ ή $\phi(b) \in J \Rightarrow a \in \phi^{-1}(J)$ ή $b \in \phi^{-1}(J)$ αντίφαση.

b) Έστω $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ η ένθεση, δηλ. $\phi(n) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

ΙΣΧΥΡ. Τα μόνα ιδεώδη του $\mathbb{Q}$ είναι το $\{0\}$ και το $\mathbb{Q}$.

ΑΠΟΔ. Το έχουμε δει. Αν $\mathbb{F}$ σώμα, και το $\mathbb{Q}$ είναι σώμα, τότε τα μόνα ιδεώδη του $\mathbb{F}$ είναι το $\{0_{\mathbb{F}}\}$ και το $\mathbb{F}$

ΙΣΧΥΡ.2 Το ιδεώδες $\{0\}$ του $\mathbb{Q}$ είναι μεγιστοτικό

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Φανερά $\{0\} \neq \mathbb{Q}$. Από ισχυρ. 1 $\Rightarrow \{0\}$ μεγιστοτικό ιδεώδες του $\mathbb{Q}$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 3 $\phi^{-}(\{0\}) = \{0\}$ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΙΣΤΟΤΙΚΟ ΙΔΕΩΔΕΣ του $\mathbb{Z}$, γιατί $\{0\} \subsetneq 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$

Φυλ. 8. Ασκ 6

Λύση i) Έστω I ιδεώδες του $\mathbb{Z}$. Τότε $(I,+)$ υποομάδα της άπειρης κυκλικής $(\mathbb{Z},+)$. Από πρόταση για υποομάδες άπειρης κυκλικής υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ με $I = n\mathbb{Z}$. Το αποτέλεσμα έπεται.

ii) Θέτουμε $S = \{(a,a) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \quad a \in \mathbb{Z}\}$

ΙΣΧΥΡ. 1 S υποδακτύλιος του $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

ΙΣΧΥΡ. 2 S όχι ιδεώδες του $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έχουμε $r = (2,0) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $a = (1,1) \in S$. Τότε $ra = (2,0) \notin S$